Total number of printed pages–31

3 (Sem–1/CBCS) MAT HG 1/2/RC

2023

MATHEMATICS

(Honours Generic/Regular)

For Honours Generic

Attempt either MAT–HG–1016 ***or*** MAT–HG–1026

For Regular

Attempt MAT–RC–1016

OPTION–A

Paper : MAT–HG–1016/MAT–RC–1016

(Calculus)

OPTION–B

Paper : MAT–HG–1026

(Analytical Geometry)

Full Marks : 80

Time : Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Answer ***either*** *in English* ***or*** *in Assamese.*

Contd.

OPTION–A

Paper : MAT–HG–1016/MAT–RC–1016

(Calculus)

1. Answer the following questions : $1 \times 10 = 10$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Find the value of $\cos 1740^\circ$.

$\cos 1740^\circ$ ৰ মান উলিওৱা।

(b) What are the domain and range of the function $f(x) = \sin^{-1} x$?

$f(x) = \sin^{-1} x$ ফলনৰ আদিক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰ লিখা।

(c) If $\underset{x \to a}{Lt}\, g(x) = -4$ and $\underset{x \to a}{Lt}\, h(x) = 0$, find $\underset{x \to a}{Lt}\, [h(x) - 3g(x) + 1]$.

যদি $\underset{x \to a}{Lt}\, g(x) = -4$ আৰু $\underset{x \to a}{Lt}\, h(x) = 0$, তেন্তে $\underset{x \to a}{Lt}\, [h(x) - 3g(x) + 1]$ ৰ মান উলিওৱা।

(d) Find k for which $f(x)=\begin{cases} 7x-2k, & x\le 1 \\ 4x^2, & x>1 \end{cases}$

is continuous at 1.

k ৰ মান উলিওৱা যাৰ বাবে

$$f(x)=\begin{cases} 7x-2k, & x\le 1 \\ 4x^2, & x>1 \end{cases}$$

ফলনটো $x=1$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন।

(e) Find the nth derivative of $y=x^n$.

$y=x^n$ ফলনৰ n-তম অৱকলজ উলিওৱা।

(f) State whether, the following statement is true **or** false :

The function $f(x)=\cos x$ is increasing in the interval $[0, \pi]$.

তলৰ উক্তিটো সঁচা *নে* মিছা উল্লেখ কৰা ঃ

$f(x)=\cos x$ ফলনটো $[0, \pi]$ অন্তৰালত বৰ্ধমান।

(g) State whether the following statement is true **or** false :

Every continuous function is differentiable.

তলৰ উক্তিটো সঁচা *নে* মিছা উল্লেখ কৰা ঃ

প্ৰতিটো অবিচ্ছিন্ন ফলনেই অৱকলনীয়।

(h) Find $\frac{\partial u}{\partial x}$ if $u = log(x^2 + y^2)$.

$\frac{\partial u}{\partial x}$ নিৰ্ণয় কৰা যদি $u = log(x^2 + y^2)$।

(i) If $f(x) = x(x-1)$, then on which interval the function is decreasing?

যদি $f(x) = x(x-1)$, তেন্তে কি অন্তৰালত ফলনটো হ্ৰাসমান?

(j) Show that the function $f(x) = \sin x$ is not one-one in the interval $[0, \pi]$.

দেখুওৱা যে $f(x) = \sin x$ ফলনটো $[0, \pi]$ অন্তৰালত একৈকী নহয়।

2. Answer the following questions : $2\times5=10$

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) Explain why $\underset{x\to 0}{Lt}\frac{|x|}{x}$ does not exists.

$\underset{x\to 0}{Lt}\frac{|x|}{x}$ কিয় স্থিত নহয় ব্যাখ্যা কৰা।

(b) Find the nth derivative of the function $y = a^{mx}$.

$y = a^{mx}$ ফলনটোৰ n তম অৱকলজ উলিওৱা।

(c) If $v = x^2 + y^2 + z^2$, then prove that

$$x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}+z\frac{\partial v}{\partial z}=2v.$$

যদি $v = x^2 + y^2 + z^2$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}+z\frac{\partial v}{\partial z}=2v.$$

(d) If $y = sin^{-1} x$, then prove that

$(1-x^2)y_2 - xy_1 = 0$

যদি $y = sin^{-1} x$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$(1-x^2)y_2 - xy_1 = 0$

(e) Prove that arc $sin\, x +$ arc $cos\, x = \pi/2$.

প্ৰমাণ কৰা যে arc $sin\, x +$ arc $cos\, x = \pi/2$.

3. Answer ***any four*** questions : 5×4=20

যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Let $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$. Find $f\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ and the natural domain of f.

ধৰা হ'ল $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$, $f\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ আৰু f ৰ স্বাভাৱিক আদিক্ষেত্ৰ উলিওৱা।

(b) If $y = e^{a \sin^{-1} x}$, then prove that

$$\left(1 - x^2\right) y_{n+2} - (2n+1)\, x y_{n+1} - \left(n^2 + a^2\right) y_n = 0$$

যদি $y = e^{a \sin^{-1} x}$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\left(1 - x^2\right) y_{n+2} - (2n+1)\, x y_{n+1} - \left(n^2 + a^2\right) y_n = 0$$

(c) Show that the area of a triangle *ABC* is $\frac{1}{2} ca \sin B$.

দেখুওৱা যে *ABC* ত্ৰিভুজৰ কালি $\frac{1}{2} ca \sin B$.

(d) If f and g are continuous at c in its domain and $g(c) \neq 0$, show that f/g is also continuous at c.

যদি f আৰু g ফলন দুটা ইয়াৰ আদিক্ষেত্ৰৰ c বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন আৰু $g(c) \neq 0$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে f/g ফলনটোও c বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন।

(e) Evaluate, using L'Hôspital rule :

$$\underset{x \to 0}{Lt} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$$

এলহ'চপিতাল নিয়ম প্ৰয়োগ কৰি মান উলিওঁৱা ঃ

$$\underset{x \to 0}{Lt} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$$

(f) If u is a homogeneous function of x and y of degree n, show that

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u$$

যদি u এটা x আৰু y ৰ n ঘাতৰ সুসম ফলন, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u$$

Answer ***either*** *(a)* **or** *(b)* from the following questions : 10×4=40

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ *(a)* বা *(b)* অংশৰ উত্তৰ কৰা ঃ

4. *(a)* *(i)* Let $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+2}, & x<-2\\ x^2-5, & -2\le x\le 3\\ \sqrt{x+13}, & x>3\end{cases}$

Find (a) $\underset{x\to -2}{Lt} f(x)$ (b) $\underset{x\to 0}{Lt} f(x)$ (c) $\underset{x\to 3}{Lt} f(x)$. 5

ধৰা হ'ল $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+2}, & x<-2\\ x^2-5, & -2\le x\le 3\\ \sqrt{x+13}, & x>3\end{cases}$

(a) $\underset{x\to -2}{Lt} f(x)$ (b) $\underset{x\to 0}{Lt} f(x)$ (c) $\underset{x\to 3}{Lt} f(x)$.

নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) Find the value of k and m for which the following function f is continuous everywhere : 5

$$f(x)=\begin{cases} x^2+5, & x>2 \\ m(x+1)+k, & -1<x\leq 2 \\ 2x^3+x+7, & x\leq -1 \end{cases}$$

k আৰু m ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যাৰ বাবে তলত দিয়া ফলনটো সদায় অবিচ্ছিন্ন ঃ

$$f(x)=\begin{cases} x^2+5, & x>2 \\ m(x+1)+k, & -1<x\leq 2 \\ 2x^3+x+7, & x\leq -1 \end{cases}$$

(b) (i) If $u=log\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)$, then prove that

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{3}{x+y+z}$$ 5

যদি $u=log\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{3}{x+y+z}$$

(ii) State Euler's theorem on homogeneous function. If

$$u = tan^{-1}\frac{x^3+y^3}{x-y}, x \neq y, \text{ then}$$

prove that $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = sin\, 2u$. 5

সুষম ফলনৰ বাবে ইডলাৰৰ উপপাদ্যৰ উক্তি

দিয়া। যদি $u = tan^{-1}\frac{x^3+y^3}{x-y}, x \neq y$,

তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = sin\, 2u.$$

5. (a) (i) State and prove Leibnitz theorem. 5

লেইবনিটজৰ উপপাদ্যৰ উক্তি দি প্ৰমাণ কৰা।

(ii) If $cos^{-1}\frac{y}{b} = log\left(\frac{x}{n}\right)^n$, prove that

$$x^2 y_{n+2} + (2n+1)x\, y_{n+1} + 2n^2 y_n = 0.$$

5

যদি $cos^{-1}\frac{y}{b} = log\left(\frac{x}{n}\right)^n$, প্ৰমাণ কৰা যে

$$x^2 y_{n+2} + (2n+1)x\, y_{n+1} + 2n^2 y_n = 0$$

(b) State and prove Lagrange's mean value theorem. Also state Rolle's theorem and verify it for the function $f(x) = x(x+3)\,e^{-x/2}$ in [-3, 0]

1+4+1+4=10

লাগ্ৰাঞ্জৰ উপপাদ্যৰ উক্তি দি প্ৰমাণ কৰা। আকৌ ৰোলৰ উপপাদ্যৰ উক্তি দিয়া আৰু ইয়াক [-3, 0] অন্তৰালত $f(x) = x(x+3)\,e^{-x/2}$ ফলনৰ বাবে সত্যাপন কৰা।

6. (a) (i) Find the Maclaurin series for e^x and $sinx$. 5

e^x আৰু $sinx$ ৰ বাবে মেক্লৰিনৰ শ্ৰেণীবোৰ উলিওৱা।

(ii) Show that $\frac{x}{1+x} < log\,(1+x) < x$ for $x > 0$. 5

$x > 0$ ৰ বাবে দেখুওৱা যে

$$\frac{x}{1+x} < log\,(1+x) < x.$$

(b) (i) A triangle has sides $a = 3$ units, $b = 4$ units and $c = 90°$. Find the length of the side c. 5

এটা ত্ৰিভুজৰ বাহুবোৰ হ'ল $a = 3$ একক, $b = 4$ একক আৰু $c = 90°$. c বাহুটোৰ দৈৰ্ঘ্য নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) Prove that

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B.$$

Hence deduce that

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$ 5

প্ৰমাণ কৰা যে

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B.$$

ইয়াৰ সহায়ত দেখুওৱা যে

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

7\. (a) (i) If $y = \cos(m \sin^{-1} x)$, then show that

$$(1 - x^2) y_{n+2} - (2n + 1) x\, y_{n+1} + (m^2 - n^2) y_n = 0.$$

5

যদি $y = \cos\left(m \sin^{-1} x\right)$, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$\left(1-x^2\right) y_{n+2} - (2n+1)\, x\, y_{n+1} + \left(m^2 - n^2\right) y_n = 0$$

(ii) Show that the function $z = e^x \sin y + e^y \cos x$ satisfies the equation $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. 5

দেখুওৱা যে $z = e^x \sin y + e^y \cos x$ ফলনটোৱে $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰে।

(b) *(i)* Find the values of a and b in order that $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{x(1 + a\cos x) - b\sin x}{x^3}$ is equal to 1. 5

a আৰু b ৰ মান উলিওৱা যাতে $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{x(1 + a\cos x) - b\sin x}{x^3}$ ৰ মান 1 হয়।

(ii) Describe the level surfaces of the following functions : 2½×2=5

তলত দিয়া ফলনবোৰৰ পৃষ্ঠস্তৰ বৰ্ণনা কৰা ঃ

(a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

(b) $f(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2$

OPTION–B

Paper : MAT–HG–1026

(Analytical Geometry)

1. Answer the following questions : 1×10=10

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(i) Define a locus.

এটা সঞ্চাৰপথৰ সংজ্ঞা লিখা।

(ii) Write the equation of tangent to the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ at any point (x',y').

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তৰ যিকোনো বিন্দু (x',y') ত টনা স্পৰ্শকৰ সমীকৰণ লিখা।

(iii) Write the equation of asymptotes to the hyperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পৰাবৃত্তৰ অনন্তস্পৰ্শী ৰেখাদ্বয়ৰ সমীকৰণ লিখা।

(iv) What are the conditions that the general equation of second degree

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

represent a parabola?

সাধাৰণ দ্বিঘাত সমীকৰণ

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

এ এটা অধিবৃত্ত নিৰ্ণয় কৰাৰ চৰ্ত কি?

(v) Transform the equation $x^2 + y^2 = 9$ into polar form.

$x^2 + y^2 = 9$ সমীকৰণটোক ধ্ৰুৱীয় সমীকৰণলৈ ৰূপান্তৰ কৰা।

(vi) Write the parametric equation of the line $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} = r$.

$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} = r$ ৰেখাৰ প্ৰাচলিক সমীকৰণটো লিখা।

(vii) Find the intercepts made by the plane $x - y + z = 2$ on the axes.

$x - y + z = 2$ সমতলে অক্ষসমূহৰ ওপৰত কৰা ছেদাংশৰ মান উলিওৱা।

(viii) Write down the coordinates of the centre of the sphere given by the equation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 8z + 4 = 0.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 8z + 4 = 0$$

গোলকটোৰ কেন্দ্ৰৰ স্থানাংক লিখা।

(ix) What is the value of the scalar product of two perpendicular vectors?

দুটা লম্বা ভেক্টৰৰ অদিশপূৰণৰ মান কিমান?

(x) Write the condition that the three vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ be coplanar.

তিনিটা ভেক্টৰ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ একেসমতলীয় হোৱাৰ চৰ্তটো লিখা।

2. Answer the following questions : $2 \times 5 = 10$

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Find the equation of the circle

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$$

when the origin is transferred to the point (h, k).

মূলবিন্দুক (h, k) বিন্দুলৈ স্থানান্তৰ কৰিলে

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ বৃত্তৰ ৰূপান্তৰিত

সমীকৰণটো নিৰ্ণয় কৰা।

(b) Prove that the equation

$$6x^2 - 5xy - 6y^2 + 14x + 5y + 4 = 0$$

represents a pair of perpendicular lines.

প্ৰমাণ কৰা যে

$$6x^2 - 5xy - 6y^2 + 14x + 5y + 4 = 0$$

সমীকৰণে এযোৰ লম্বৰেখা নিৰ্ধাৰণ কৰে।

(c) Find the co-ordinates of the focus and the vertex of the parabola

$$y^2 - 4y - 2x - 8 = 0$$

অধিবৃত্তটোৰ নাভিবিন্দু আৰু শীৰ্ষবিন্দুৰ স্থানাংক নিৰ্ণয় কৰা।

(d) Find the angle between the planes $2x - y + z = 6$ and $x + y + 2z = 7$.

সমতল দুখনৰ মাজৰ কোণ নিৰ্ণয় কৰা।

(e) If $\vec{R}$ be a unit vector in the direction of $\vec{r}$, prove that

$$\vec{R} \times \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{1}{r^2}\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}, \text{ where } r = |\vec{r}|.$$

যদি $\vec{r}$ ৰ দিশত একক ভেক্টৰ $\vec{R}$ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\vec{R} \times \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{1}{r^2}\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

য'ত $r = |\vec{r}|$.

3. Answer ***any four*** questions : 5×4=20

যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) If $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ represents *two* linear equidistant lines from the origin, show that

$$f^4 - g^4 = c\left(bf^2 - ag^2\right)$$

যদি $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকৰণে এযোৰ মূলবিন্দুৰ পৰা সমদূৰত্বত থকা সৰলৰেখা নিৰ্দেশ কৰে, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$f^4 - g^4 = c\left(bf^2 - ag^2\right)$$

(b) What is the polar equation of a conic? If PSP' and QSQ' be *any two* perpendicular focal chords of a conic, then show that

$$\frac{1}{SP.SP'} + \frac{1}{SQ.SQ'} \text{ is a constant.}$$

শাংকবৰ ধ্ৰুৱীয় সমীকৰণটো কি? যদি PSP' আৰু QSQ' এটা শাংকবৰ দুডল লম্বীয় নাভিজ্যা হয়, দেখুওৱা

যে $\frac{1}{SP.SP'} + \frac{1}{SQ.SQ'}$ এটা ধ্ৰুৱক।

(c) Reduce the following equation to the standard form and determine the type of the conic it represents

$$8x^2 - 12xy + 17y^2 + 16x - 12y + 3 = 0$$

ওপৰৰ সমীকৰণটোক আদৰ্শ আকাৰলৈ ৰূপান্তৰিত কৰি ই কেনে ধৰণৰ শাংকৱ বুজায় নিৰূপণ কৰা।

(d) Find the equation of the plane passing through the point $(1, 2, -1)$ and the line of intersection of the two planes $2x - y + 2z - 2 = 0$ and $x + 2y - 4z + 3 = 0$.

$(1, 2, -1)$ বিন্দুৰ মাজেদি থোৱা আৰু

$2x - y + 2z - 2 = 0$ আৰু $x + 2y - 4z + 3 = 0$

সমতল দুখনে কটাকটি কৰা ৰেখাডালৰ মাজেৰে থোৱা সমতল খনৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

(e) Find the equation of the cone whose vertex is (α, β, γ) and guiding curve is $ax^2 + by^2 = 1;\ z = 0$.

এটা শংকুৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা য'ত শংকুৰ শীৰ্ষবিন্দুৰ স্থানাংক (α, β, γ) আৰু নিৰ্দেশক বক্ৰটো হ'ল $ax^2 + by^2 = 1,\ z = 0$.

(f) If (যদি)

$$\vec{A} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$

$$\vec{C} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

find (নিৰ্ণয় কৰা)

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}.$$

Answer **either** (a) **or** (b) from each of the following questions :

তলৰ প্ৰতিটো প্ৰশ্নৰ পৰা (a) অথবা (b) ৰ পৰা উত্তৰ দিয়া ঃ

4. (a) (i) Find the equation of the pair of straight lines perpendicular to the pair of lines given by

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$$ 5

সৰলৰেখাৰ লম্ব হোৱা সৰলৰেখাদ্বয়ৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) Find the asymptotes of the hyperbola

$$2x^2 - xy - y^2 + 2x - 2y + 2 = 0$$ 5

পৰাবৃত্তটোৰ অনন্তস্পৰ্শী ৰেখাদ্বয় নিৰ্ণয় কৰা।

(b) (i) Prove that the product of the perpendicular from the point (x',y') on the lines

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ is

$$\frac{ax'^2 + 2hx'y' + by'^2}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}.$$ 5

প্ৰমাণ কৰা যে (x',y') বিন্দুৰ পৰা $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ লৈ টনা লম্ববোৰৰ গুণফল

$$\frac{ax'^2 + 2hx'y' + by'^2}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$$

(ii) Prove that the eccentric angles of the extremities of two conjugate semi-diameters of an ellipse differ by a right angle. 5

প্ৰমাণ কৰা যে উপবৃত্ত এটাৰ সংযুগ্ম অৰ্ধব্যাস দুডালৰ চৰমবিন্দুত উৎপন্ন হোৱা উৎকেন্দ্ৰীক কোণৰ অন্তৰ এটা সমকোণ।

5. (a) (i) Find the pole of the line $lx + my + n = 0$ with respect to the parabola $y^2 = 4ax$. 5

$y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তটোৰ সাপেক্ষে $lx + my + n = 0$ ৰেখাৰ ধ্ৰুৱ বিন্দু নিৰূপণ কৰা।

(ii) If the equation of the conic is $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$, then show that the equation of the tangent at the point α is $\frac{l}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \alpha)$. 5

যদি এটা শাংকৱৰ সমীকৰণ $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে α বিন্দুত ইয়াৰ স্পৰ্শকৰ সমীকৰণ হ'ব

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \alpha)$$

(b) (i) Show that the length of the semi axes of the conic $ax^2 + 2hxy + ay^2 = d$ are

$$\sqrt{\frac{d}{a+h}} \text{ and } \sqrt{\frac{d}{a-h}}.$$ 5

দেখুওৱা যে $ax^2 + 2hxy + ay^2 = d$ শাংকবৰ অক্ষদ্বয়ৰ দৈর্ঘ্য ক্রমে

$$\sqrt{\frac{d}{a+h}} \text{ আৰু } \sqrt{\frac{d}{a-h}}$$

(ii) Find the condition that the line $\frac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ touches the conic $\frac{l}{r} = 1 - e\cos\theta$. 5

$\frac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ সৰলৰেখাই $\frac{l}{r} = 1 - e\cos\theta$ শাংকবটোৰ স্পর্শক হোৱাৰ চৰ্ত নিৰ্ণয় কৰা।

6. *(a)* *(i)* Find the symmetrical form of the equation of a line $x+y+z+1=0$, $4x+y-2z+2=0$ and also find its direction cosines. 5

$x+y+z+1=0$ আৰু

$4x+y-2z+2=0$ ৰেখাৰ সমমিত আকাৰৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা আৰু ইয়াৰ লগতে দিশাংকসমূহো নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) Find the equation of a cylinder whose generating lines have the direction cosines l, m, n and which passes through the circle $x^2+z^2=a^2$, $y=0$. 5

এটা চিলিণ্ডাৰৰ উৎপাদক ৰেখাডালৰ দিশাংক l, m, n আৰু ই $x^2+z^2=a^2$, $y=0$ বৃত্তৰ মাজেৰে যায়। চিলিণ্ডাৰটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(b) (i) Prove that the plane $ax + by + cz = 0$ cuts the cone $xy + yz + zx = 0$ in perpendicular lines if $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. 5

প্ৰমাণ কৰা যে $ax + by + cz = 0$ সমতল থনে $xy + yz + zx = 0$ শংকুটোক লম্ব ৰেখাত ছেদ কৰে যদি $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ হয়।

(ii) Find the equation to the sphere that passes through the circle $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, $x + 2y + 3z = 3$ and touches the plane $4x + 3y = 15$. 5

$x^2 + y^2 + z^2 = 5$, $x + 2y + 3z = 3$ বৃত্তগামী আৰু $4x + 3y = 15$ সমতলক স্পৰ্শ কৰা গোলকৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

7. *(a)* *(i)* Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right).\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=\begin{vmatrix}\vec{a}.\vec{c} & \vec{a}.\vec{d}\\ \vec{b}.\vec{c} & \vec{b}.\vec{d}\end{vmatrix}$$

Hence show that (গতিকে দেখুওৱা যে)

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2=a^2b^2-\left(\vec{a}.\vec{b}\right)^2$$ 5

(ii) A particle moves along the curve $x=2t^2$, $y=t^2-4t$, $z=3t-5$ where t is the time. Find the components of its velocity and acceleration at time $t=1$ in the direction $\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$. 5

এটা কণিকাই $x=2t^2$, $y=t^2-4t$, $z=3t-5$ বক্ৰেৰে গতি কৰে, য'ত t য়ে সময় বুজাইছে। যেতিয়া $t=1$, কণিকাটিৰ বেগ আৰু ত্বৰণৰ উপাংশ $\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ ৰ দিশত নিৰূপণ কৰা।

(b) (i) If $\bar{r} = t^2\hat{i} - t\hat{j} + 2(t+1)\hat{k}$, find at $t = 0$, the value of

$$\frac{d\vec{r}}{dt},\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2},\ \frac{d^3\vec{r}}{dt^3},\ \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|, \text{ and}$$

$$\left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|.$$ 5

যদি $\vec{r} = t^2\hat{i} - t\hat{j} + 2(t+1)\hat{k}$, তেন্তে $t = 0$ ত

$$\frac{d\vec{r}}{dt},\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2},\ \frac{d^3\vec{r}}{dt^3},\ \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \text{আৰু} \left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|$$

মান নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) Find a vector $\vec{\delta}$ which is perpendicular to both $\vec{\alpha} = 4\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k}$ and $\vec{\beta} = \hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ and $\vec{\delta}.\bar{\gamma} = 21$ where $\bar{\gamma} = 3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$. 5

$\vec{\alpha} = 4\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k}$ আৰু $\vec{\beta} = \hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টৰৰ লম্ব হোৱা আৰু $\vec{\delta} . \vec{\gamma} = 21$ য'ত $\vec{\gamma} = 3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ হয় তেন্তে ভেক্টৰ $\vec{\delta}$ নিৰ্ণয় কৰা।