

Total number of printed pages-11

1 (Sem-4/FYUGP) MAT 41 MN/(B)

2026

MATHEMATICS

(Minor)

SET-B

Paper : MAT4400504MN

(Number Theory-I)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

*The figures in the margin indicate
full marks for the questions.*

SET-B

Answer **either** in English **or** in Assamese.

1. Answer the following questions : $1 \times 8 = 8$

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(i) Show that Diophantine equation $2x + 4y = 5$ has no solution.

দেখুওৱা যে ডাইওফেণ্টাইন সমীকৰণ $2x + 4y = 5$ -
ৰ কোনো সমাধান নাই।

(ii) For any integer $a \neq 0$, prove that $a \mid 0$.

যিকোনো অশূন্য অখণ্ড সংখ্যাৰ বাবে প্ৰমাণ কৰা যে
 $a \mid 0$.

(iii) If the positive integers a and b are relatively prime then

$\gcd(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$. (Fill in the blank)

যদি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা a আৰু b পৰস্পৰ মৌলিক
হয় তেন্তে $\gcd(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ ।

(খালী ঠাই পূৰ কৰা)

(iv) Give example of integers a and b such
that $a^2 \equiv b^2 \pmod{3}$ but $a \not\equiv b \pmod{3}$.

অখণ্ড সংখ্যা a আৰু b -ৰ উদাহৰণ দিয়া য'ত

$a^2 \equiv b^2 \pmod{3}$ কিন্তু $a \not\equiv b \pmod{3}$ ।

(v) State Fermat's Theorem.

ফাৰ্মাৰ উপপাদ্যটো লিখা।

(vi) Find the value of $\phi(180)$.

$\phi(180)$ -ৰ মান উলিওৱা।

(vii) Define τ -function.

τ -ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(viii) How many solutions does the linear
congruence $ax \equiv b \pmod{n}$ have when
 $\gcd(a, n) = 1$?

ৰৈখিক অনুৰূপতা $ax \equiv b \pmod{n}$ -ৰ কিমানটা
সমাধান থাকিব যেতিয়া $\gcd(a, n) = 1$ হয়?

2. Answer **any six** of the following questions :
 $2 \times 6 = 12$

তলৰ যিকোনো ছয়টা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

(i) Show that square of any integer is
either of the form $4k$ or $4k + 1$.

দেখুওৱা যে যিকোনো অখণ্ড সংখ্যাৰ বৰ্গ $4k$ বা $4k + 1$ আকাৰত থাকিব।

- (ii) If $a \mid bc$ and $\gcd(a, b) = 1$, then show that $a \mid c$.

যদি $a \mid bc$ আৰু $\gcd(a, b) = 1$, তেন্তে দেখুওৱা যে $a \mid c$ ।

- (iii) Give examples of integers a, b, c such that $a \mid bc$ but $a \nmid b$ and $a \nmid c$.

অখণ্ড সংখ্যা a, b, c -ৰ উদাহৰণ দিয়া য'ত $a \mid bc$ কিন্তু $a \nmid b$ আৰু $a \nmid c$ ।

- (iv) What is the remainder when 7^{30} is divided by 4?

7^{30} ক 4 ৰে হৰণ কৰিলে ভাগশেষ কি হ'ব?

- (v) If $a \equiv b \pmod{n}$ and $m \mid n$, then prove that $a \equiv b \pmod{m}$.

যদি $a \equiv b \pmod{n}$ আৰু $m \mid n$, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে $a \equiv b \pmod{m}$ ।

- (vi) Find the digit of the unit place of 3^{100} .

3^{100} -ৰ একক স্থানৰ অংকটো উলিওৱা।

- (vii) For arbitrary integers a, b, c if

$a \equiv b \pmod{n}$, then prove that

$$a + c \equiv b + c \pmod{n}.$$

যিকোনো অখণ্ড সংখ্যা a, b, c -ৰ বাবে যদি

$a \equiv b \pmod{n}$ তেন্তে প্রমাণ কৰা যে

$$a + c \equiv b + c \pmod{n}.$$

- (viii) For odd integer n , show that

$$\phi(2n) = \phi(n).$$

অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা n -ৰ বাবে দেখুওৱা যে

$$\phi(2n) = \phi(n).$$

- (ix) Find the number of positive divisors of 7056.

7056-ৰ ধনাত্মক বিভাজকৰ সংখ্যা উলিওৱা।

- (x) Prove that equation $\phi(n) = \phi(n+2)$ is satisfied by $n = 2(2p-1)$ whenever p and $2p-1$ are both odd primes.

প্রমাণ কৰা যে $n = 2(2p - 1)$ -ৰ দ্বাৰা

$\phi(n) = \phi(n + 2)$ সমীকৰণটো সিদ্ধ হয় য'ত p আৰু

$2p - 1$ দুয়োটা অযুগ্ম মৌলিক সংখ্যা।

3. Answer **any four** of the following questions :

$$5 \times 4 = 20$$

তলৰ যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

(i) For $n \geq 1$, prove that $n(n+1)(2n+1)/6$ is an integer.

সকলো অখণ্ড সংখ্যা $n \geq 1$ -ৰ বাবে প্রমাণ কৰা যে $n(n+1)(2n+1)/6$ এটা অখণ্ড সংখ্যা।

(ii) Use the Euclidean Algorithm to obtain integers x and y satisfying

$$\gcd(1769, 2378) = 1769x + 2378y$$

ইউক্লিডিয়ান কলনবিধি প্ৰয়োগ কৰি অখণ্ড সংখ্যা x আৰু y উলিওৱা য'ত

$$\gcd(1769, 2378) = 1769x + 2378y$$

(iii) Prove that there is an infinite number of primes.

প্রমাণ কৰা যে মৌলিক সংখ্যাৰ সংখ্যাটো অসীম।

(iv) Determine all solutions in the integers of the Diophantine equation

$$56x + 72y = 40.$$

$56x + 72y = 40$ ডাইওফেণ্টাইন সমীকৰণটোৰ সকলো অখণ্ড সংখ্যাৰ সমাধান উলিওৱা।

(v) If $ca \equiv cb \pmod{n}$, prove that

$$a \equiv b \pmod{\frac{n}{d}} \text{ where } d = \gcd(c, n).$$

যদি $ca \equiv cb \pmod{n}$ হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে

$$a \equiv b \pmod{\frac{n}{d}} \text{ য'ত } d = \gcd(c, n)।$$

(vi) If p is prime and $\gcd(a, p) = 1$, then prove that $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

যদি p এটা মৌলিক সংখ্যা আৰু $\gcd(a, p) = 1$ হয় তেন্তে প্রমাণ কৰা যে $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ।

(vii) Define Euler's phi function. If p is a prime and $k > 0$ then prove that

$$\phi(p^k) = p^k \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

অইলাৰৰ ফাই ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া। যদি p এটা
মৌলিক সংখ্যা আৰু $k > 0$ হয় তেন্তে প্রমাণ কৰা

$$\phi(p^k) = p^k \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

(viii) If f is a multiplicative function and

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

Then show that F is also multiplicative.

যদি f এটা গুণকীয় ফলন আৰু

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

তেন্তে দেখুওৱা যে F ও এটা গুণকীয় ফলন।

4. Answer **any two** of the following questions :

$$10 \times 2 = 20$$

তলৰ যিকোনো দুটা প্রশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

(i) State and prove Division Algorithm.

$$2 + 8 = 10$$

বিভাজন কলনবিধিটো লিখা আৰু প্রমাণ কৰা।

(ii) (a) Prove that every integer $n \geq 2$ has
a prime factor. 5

প্রমাণ কৰা যে যিকোনো অখণ্ড সংখ্যা $n \geq 2$ -ৰ
এটা মৌলিক উৎপাদক আছে।

(b) Establish the following formula by
Mathematical induction

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

for all $n \geq 1$. 5

সকলো $n \geq 1$ -ৰ বাবে গণিতীয় আৰোহ-তত্ত্বৰ
সহায়ত তলৰ সূত্রটো প্রতিষ্ঠা কৰা।

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

(iii) (a) Prove that a positive integer n is
divisible by 3 if 3 divides the sum
of the digits of n . 5

প্রমাণ কৰা যে এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n , 3ৰে
বিভাজ্য হ'ব যদিহে n সংখ্যাটোৰ অংকবোৰৰ
যোগফল 3ৰে বিভাজ্য হয়।

(b) If $a \equiv b \pmod{n}$, then prove that $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ for any positive integer k . 5

যদি $a \equiv b \pmod{n}$ হয় তেন্তে যিকোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা k -ৰ বাবে প্রমাণ কৰা যে $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ ।

(iv) (a) If $3 \mid n$ then show that $\phi(3n) = 3\phi(n)$. 5

যদি $3 \mid n$ হয় তেন্তে দেখুওৱা যে $\phi(3n) = 3\phi(n)$ ।

(b) If $\gcd(9, 35) = 1$, show that $a^{12} \equiv 1 \pmod{35}$. 5

যদি $\gcd(9, 35) = 1$, দেখুওৱা যে $a^{12} \equiv 1 \pmod{35}$ ।

(v) (a) For any positive integer n , prove that

$$\phi(n) = n \sum_{d \mid n} \frac{\mu(d)}{d} \quad 5$$

যিকোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n -ৰ বাবে প্রমাণ

$$\text{কৰা যে } \phi(n) = n \sum_{d \mid n} \frac{\mu(d)}{d}।$$

(b) Using Chinese Remainder Theorem solve the following linear congruences

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{3} \\ x &\equiv 2 \pmod{5} \\ x &\equiv 3 \pmod{7} \end{aligned} \quad 5$$

চাইনীজ ৰিমাইণ্ডাৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ বৈখিক অনুৰূপতা কেইটা সমাধান কৰা

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{3} \\ x &\equiv 2 \pmod{5} \\ x &\equiv 3 \pmod{7} \end{aligned}$$