

Total number of printed pages-11

1 (Sem-4/FYUGP) MAT 43 MN/(A)

2026

MATHEMATICS

(Minor)

SET-A

Paper : MAT4400704MN

(Real Analysis)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

*The figures in the margin indicate
full marks for the questions.*

SET-A

Answer **either** in English **or** in Assamese.

1. Answer the following questions : $1 \times 8 = 8$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) If u and $b \neq 0$ are elements of $\mathbb{R}$ such that $u.b = b$, then $u = \underline{\hspace{2cm}}$.
(Fill in the blank)

যদি u আৰু $b \neq 0$, $\mathbb{R}$ -ৰ উপাদান হয় যাতে $u.b = b$,
তেন্তে $u = \underline{\hspace{2cm}}$ ।

(খালী ঠাই পূৰণ কৰা)

(b) Define convergence sequence of real numbers.

বাস্তৱ সংখ্যাৰ অভিসাৰী অনুক্ৰমৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(c) If $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ is a positive terms series

such that $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = l$, then the series converges, if

যদি $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ এটা ধনাত্মক পদ বিশিষ্ট শ্ৰেণী হয়

আৰু $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = l$, তেন্তে শ্ৰেণীটো অভিসাৰী হ'ব যদি

(i) $l < 1$

(ii) $0 < l < 1$

(iii) $l > 1$

(iv) $0 \leq l < 1$

(d) Define monotonic increasing sequence.

একদিশ্ৰ বৰ্ধমান অনুক্ৰমৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(e) A Cauchy sequence of real numbers is bounded. (Write True or False)

বাস্তৱ সংখ্যাৰ এটা ক'চি অনুক্ৰম পৰিৱদ্ধ হয়।

(সঁচা নে মিছা লিখা)

(f) Write the range of the sequence

$\{(-1)^n\}$.

$\{(-1)^n\}$ অনুক্ৰমটোৰ পৰিসৰ কি হ'ব লিখা।

(g) Write the trichotomy property of real numbers.

বাস্তৱ সংখ্যাৰ ত্ৰিকোটমি ধৰ্মটো লিখা।

(h) Write the statement of D'Alembart's ratio test.

ডি'এলেমবাৰ্টৰ অনুপাত পৰীক্ষাৰ উক্তিটো লিখা।

2. Answer **any six** of the following questions :
 $2 \times 6 = 12$

যিকোনো ছয়টা প্রশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

- (a) Write *any two* algebraic properties of $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ -ৰ যিকোনো দুটা বীজগণিতীয় ধৰ্ম লিখা।

- (b) If $a \in \mathbb{R}$ and $a \neq 0$, then prove that $a^2 > 0$.

যদি $a \in \mathbb{R}$ আৰু $a \neq 0$, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে $a^2 > 0$ ।

- (c) For all real numbers x and y , show that $|x - y| \leq |x| + |y|$

সকলো বাস্তৱ সংখ্যা x আৰু y -ৰ বাবে দেখুওৱা যে $|x - y| \leq |x| + |y|$ ।

- (d) Show that $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{n} \right) = 2$.

দেখুওৱা যে $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{n} \right) = 2$ ।

- (e) If $\{x_n\}$ is a convergence sequence and $a \leq x_n \leq b$ for all $n \in \mathbb{N}$, then show that $a \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq b$.

যদি $\{x_n\}$ এটা অভিসাৰী অনুক্রম আৰু $a \leq x_n \leq b$ সকলো $n \in \mathbb{N}$ -ৰ বাবে, তেন্তে দেখুওৱা যে $a \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq b$ ।

- (f) Show that the series $1 + 2 + 3 + \dots \infty$ is divergent.

দেখুওৱা যে $1 + 2 + 3 + \dots \infty$ শ্ৰেণীটো অপসারী।

- (g) Show that the sequence $\{1 + (-1)^n\}$ is not a Cauchy sequence.

দেখুওৱা যে $\{1 + (-1)^n\}$ অনুক্রমটো ক'চি অনুক্রম নহয়।

- (h) Define subsequence of a sequence of real numbers. Write a subsequence of the sequence $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$.

বাস্তৱ সংখ্যাৰ অনুক্রম এটাৰ উপানুক্ৰমৰ সংজ্ঞা দিয়া।

$\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ অনুক্রমটোৰ এটা উপানুক্ৰম লিখা।

- (i) Show that the sequence $(0, 2, 0, 2, \dots, 0, 2, \dots)$ does not converge to the number 0.

দেখুওৱা যে $(0, 2, 0, 2, \dots, 0, 2, \dots)$ অণুক্ৰমটো 0 লৈ অভিসাৰী নহয়।

- (j) Define conditionally convergent series. Give an example of conditionally convergent series.

চৰ্ত সাপেক্ষে অভিসাৰী শ্ৰেণীৰ সংজ্ঞা দিয়া।

এটা চৰ্ত সাপেক্ষে অভিসাৰী শ্ৰেণীৰ উদাহৰণ দিয়া।

3. Answer **any four** of the following questions :
5×4=20

যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

- (a) Prove that the set of real numbers R is uncountable.

প্ৰমাণ কৰা যে বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি R গণনাযোগ্য নহয়।

- (b) If $S = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$, then show that $\inf S = 0$.

যদি $S = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$, তেন্তে দেখুওৱা যে $\inf S = 0$ ।

- (c) Prove that a convergent sequence of real numbers is bounded. Give an example of a sequence which is bounded but not convergent.

প্ৰমাণ কৰা যে বাস্তৱ সংখ্যাৰ অভিসাৰী অনুক্ৰম এটা পৰিবিদ্ধ হয়। পৰিবিদ্ধ কিন্তু অভিসাৰী নোহোৱা এটা অনুক্ৰমৰ উদাহৰণ দিয়া।

- (d) Using comparison test, show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4-1})$ is convergent.

তুলনামূলক পৰীক্ষাৰ সহায়ত দেখুওৱা যে

$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4-1})$ শ্ৰেণীটো অভিসাৰী।

- (e) Prove that the geometric series $1 + r + r^2 + \dots + r^n + \dots \infty$ is convergent if $r < 1$ and divergent $r \geq 1$.

প্ৰমাণ কৰা যে $1 + r + r^2 + \dots + r^n + \dots \infty$ গুণোত্তৰ শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰী যদিহে $r < 1$ আৰু অপসাৰী যদিহে $r \geq 1$ ।

(f) Define Cauchy sequence of real numbers. If $x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$

for all $n \in \mathbb{N}$. Show that $\{x_n\}$ is Cauchy sequence.

বাস্তব সংখ্যার ক'চি অনুক্রমৰ সংজ্ঞা দিয়া। যদি

$$x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \text{ সকলো } n \in \mathbb{N} \text{-ৰ}$$

বাৰে, তেত্তে দেখুওৱা যে $\{x_n\}$ এটা ক'চি অনুক্রম।

(g) Prove that every monotonically increasing sequence which is bounded above converges to its least upper bound.

প্ৰমাণ কৰা যে যিকোনো একদিশ্ৰু বৰ্ধমান আৰু উচ্চ পৰিবদ্ধ অনুক্রম তাৰ নূন্যতম উচ্চ সীমালৈ অভিসাৰী হয়।

(h) If an infinite series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ is convergent, then prove that $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Give an example of a series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ such that $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ but it is not convergent.

যদি $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ অসীম শ্ৰেণীটো অভিসাৰী হয়, তেত্তে প্ৰমাণ কৰা যে $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. এনে এটা শ্ৰেণী

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ -ৰ উদাহৰণ দিয়া যাতে $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ কিন্তু শ্ৰেণীটো অভিসাৰী নহয়।

4. Answer **any two** of the following questions :
10×2=20

যিকোনো দুটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Prove that the sequence $\left\{ \frac{2n-7}{3n+2} \right\}$

(i) is monotonically increasing,

(ii) bounded and

(iii) converges to the limit $\frac{2}{3}$.

প্ৰমাণ কৰা যে $\left\{ \frac{2n-7}{3n+2} \right\}$ অনুক্রমটো

(i) একদিশ্ৰু বৰ্ধমান

(ii) পৰিবদ্ধ আৰু

(iii) $\frac{2}{3}$ সীমালৈ অভিসাৰী হয়।

(b) Test the convergence of the following series :

তলৰ শ্ৰেণীবোৰৰ অভিসাৰীতা পৰীক্ষা কৰা :

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3.5.7 \dots (2n+1)}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^n}{n^n}$

- (c) Prove that a sequence of real numbers is convergence if and only if it is a Cauchy sequence.

প্রমাণ করা যে বাস্তব সংখ্যার অনুক্রম অভিসারী হয় যদি আরু যদিহে ই এটা ক'টি অনুক্রম হয়।

- (d) Let $x_1 = 1, x_2 = 2$ and

$$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1}) \text{ for all } n > 2. \text{ Show}$$

$$\text{that } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = \frac{5}{3}.$$

ধরা হ'ল $x_1 = 1, x_2 = 2$ আরু

$$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1}), \text{ সকলো } n > 2\text{-র বাবে।}$$

$$\text{দেখুওরা যে } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = \frac{5}{3}।$$

- (e) (i) Let S be a nonempty subset of $\mathbb{R}$ that is bounded above, and let a be any number in $\mathbb{R}$. Prove that

$$\sup(a + S) = a + \sup S$$

$$\text{where } a + S = \{a + s \mid s \in S\}. \quad 6$$

ধরা হ'ল $S, \mathbb{R}$ -র এটা অধিক উচ্চ পরিবদ্ধ উপসংহতি আরু $a \in \mathbb{R}$. প্রমাণ করা যে

$$\sup(a + S) = a + \sup S$$

$$\text{য'ত } a + S = \{a + s \mid s \in S\}।$$

- (ii) Let S be nonempty bounded below subset of $\mathbb{R}$. Prove that

$$\inf S = -\sup \{-s \mid s \in S\}. \quad 4$$

ধরা হ'ল $S, \mathbb{R}$ -র এটা অধিক নিম্ন পরিবদ্ধ উপসংহতি। প্রমাণ করা যে

$$\inf S = -\sup \{-s \mid s \in S\}$$