

Total number of printed pages-11

1 (Sem-4/FYUGP) MAT 41 MN/(A)

2026

MATHEMATICS

(Minor)

SET-A

Paper : MAT4400504MN

(Number Theory-I)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

*The figures in the margin indicate
full marks for the questions.*

SET-A

Answer **either** in English **or** in Assamese.

1. Answer the following questions : $1 \times 8 = 8$

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(i) For integer a , prove that $1 | a$.

অথগু সংখ্যা a -ৰ বাবে প্ৰমাণ কৰা যে $1 | a$ ।

(ii) If a and b are two positive integers such that $\gcd(a, b) = 1$, then

$\text{lcm}(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$. (Fill in the blank)

যদি a আৰু b দুটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা য'ত

$\gcd(a, b) = 1$ তেন্তে $\text{lcm}(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ ।

(খালী ঠাই পূৰ কৰা)

(iii) Show that the Diophantine equation $3x + 6y = 5$ has no solution.

দেখুওৱা যে ডাইফেণ্টাইন সমীকৰণ

$3x + 6y = 5$ -ৰ কোনো সমাধান নাই।

(iv) State Wilson's Theorem.

উইলচনৰ উপপাদ্যটো লিখা।

(v) Find the value of $\sigma(180)$.

$\sigma(180)$ -ৰ মান উলিওৱা।

(vi) Write Euclid's lemma.

ইউক্লিডৰ প্ৰমেয়িকাটো লিখা।

(vii) Find the value of $\mu(30)$.

$\mu(30)$ -ৰ মান উলিওৱা।

(viii) What does $a \equiv b \pmod{n}$ mean?

$a \equiv b \pmod{n}$ এ কি বুজায়?

2. Answer **any six** of the following questions :
 $2 \times 6 = 12$

তলৰ যিকোনো ছয়টা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

(i) Prove that square of any odd integer is of the form $8k + 1$.

প্রমাণ কৰা যে যিকোনো অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ বৰ্গ $8k + 1$ আকাৰত থাকে।

- (ii) If $\gcd(a, b) = 1$ and $c \mid a$ then prove that $\gcd(b, c) = 1$.

যদি $\gcd(a, b) = 1$ আৰু $c \mid a$ তেন্তে প্রমাণ কৰা যে $\gcd(b, c) = 1$ ।

- (iii) Using Euclidean Algorithm find $\gcd(272, 1479)$.

ইউক্লিডিয়ানৰ কলনবিধি প্ৰয়োগ কৰি $\gcd(272, 1479)$ উলিওৱা।

- (iv) Give examples of integers a, b, c such that $a \mid (b+c)$ but $a \nmid b$ and $a \nmid c$.

অখণ্ড সংখ্যা a, b, c -ৰ উদাহৰণ দিয়া যাতে $a \mid (b+c)$ কিন্তু $a \nmid b$ আৰু $a \nmid c$ ।

- (v) Find the remainder when 2^{50} is divided by 7.

2^{50} ক 7 ৰে হৰণ কৰিলে ভাগশেষ কিমান হ'ব উলিওৱা।

- (vi) For arbitrary integers a, b, c if $a \equiv b \pmod{n}$ and $b \equiv c \pmod{n}$ then prove that $a \equiv c \pmod{n}$.

যিকোনো অখণ্ড সংখ্যা a, b, c -ৰ বাবে যদি $a \equiv b \pmod{n}$ আৰু $b \equiv c \pmod{n}$ তেন্তে প্রমাণ কৰা যে $a \equiv c \pmod{n}$ ।

- (vii) Show that $5^{10} - 3^{10}$ is divisible by 11.

দেখুওৱা যে $5^{10} - 3^{10}$, 11 ৰে বিভাজ্য হয়।

- (viii) If $3 \nmid n$ then prove that $\phi(3n) = 2\phi(n)$.

যদি $3 \nmid n$ হয় তেন্তে প্রমাণ কৰা যে $\phi(3n) = 2\phi(n)$ ।

- (ix) For $n = 14$, show that $\sigma(n) = \sigma(n+1)$.

$n = 14$ -ৰ বাবে দেখুওৱা যে $\sigma(n) = \sigma(n+1)$ ।

- (x) If $\tau(n)$ is odd integer then prove that n is a perfect square.

যদি $\tau(n)$ অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা হয় তেন্তে প্রমাণ কৰা যে n এটা পূৰ্ণ বৰ্গ সংখ্যা।

3. Answer **any four** of the following questions :
5×4=20

তলৰ যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

- (i) State and prove Archimedean property.
14=5

আৰ্কিমিডিয়ান গুণধৰ্মটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

- (ii) For all integer $a \geq 1$ prove that $a(a^2 + 2)/3$ is an integer.

সকলো অখণ্ড সংখ্যা $a \geq 1$ -ৰ বাবে প্ৰমাণ কৰা যে $a(a^2 + 2)/3$ এটা অখণ্ড সংখ্যা।

- (iii) Determine all solutions in the positive integers of the Diophantine equation $54x + 21y = 906$.

$54x + 21y = 906$ ডাইওফেণ্টাইন সমীকৰণটোৰ সকলো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ সমাধান উলিওৱা।

- (iv) If P is a prime, then show that $a^P \equiv a \pmod{P}$ for any integer a .

যদি P এটা মৌলিক সংখ্যা হয় তেন্তে যিকোনো অখণ্ড সংখ্যা a -ৰ বাবে দেখুওৱা যে $a^P \equiv a \pmod{P}$ ।

- (v) Let $a, b \in \mathbb{Z}$. Prove that if $\gcd(a, b) = 1$, then $\gcd(a + b, a - b) = 1$ or 2 .

ধৰা হ'ল $a, b \in \mathbb{Z}$ । যদি $\gcd(a, b) = 1$ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $\gcd(a + b, a - b) = 1$ বা 2 ।

- (vi) Prove that a positive integer n is divisible by 4 if the number formed by its ten and unit digits is divisible by 4.

প্ৰমাণ কৰা যে এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n , 4 ৰে বিভাজ্য হ'ব যদিহে সংখ্যাটোৰ দহক আৰু এককৰ স্থানৰ অংকৰে গঠিত সংখ্যাটো 4ৰে বিভাজ্য হয়।

- (vii) Define multiplicative function. Show that the function τ is multiplicative.

গুণকীয় ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া। দেখুওৱা যে τ ফলনটো গুণকীয়।

- (viii) If $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$ is the prime factorization of $n > 1$, then prove that

$$\phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

যদি $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$, $n > 1$ -ৰ মৌলিক
উৎপাদক বিশ্লেষণ হয় তেন্তে প্রমাণ কৰা যে

$$\phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

4. Answer **any two** of the following questions :
10×2=20

তলৰ যিকোনো দুটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

- (i) State and prove that fundamental
theorem of arithmetic. 2+8=10

পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্যটো লিখা আৰু প্রমাণ কৰা।

- (ii) (a) Prove that if a and b are integers
with $b > 0$, then there exists unique
integers q and r satisfying
 $a = qb + r$, where $0 \leq r < b$. 6

যদি a আৰু b অখণ্ড সংখ্যা আৰু $b > 0$. তেন্তে
প্রমাণ কৰা যে একমাত্ৰ অখণ্ড সংখ্যা q আৰু r
থাকে যাতে $a = qb + r$, য'ত $0 \leq r < b$ ।

- (b) Establish the following formula by
Mathematical induction : 4

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \text{ for all } n \geq 1.$$

সকলো $n \geq 1$ -ৰ বাবে গণিতীয় আৰোহ-তত্ত্বৰ
সহায়ত তলৰ সূত্ৰটো প্রতিষ্ঠা কৰা

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

- (iii) (a) Using Chinese Remainder theorem
solve the following linear
congruences $x \equiv 3 \pmod{4}$,

$$x \equiv 2 \pmod{5}, x \equiv 6 \pmod{7} \quad 5$$

চাইনীজ ৰিমাইণ্ডাৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত তলৰ বৈখিক
অনুৰূপ কেইটা সমাধান কৰা।

$$x \equiv 3 \pmod{4}, x \equiv 2 \pmod{5},$$

$$x \equiv 6 \pmod{7}$$

- (b) If p and q are distinct primes,
prove that

$$p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}. \quad 5$$

যদি p আৰু q পৃথক মৌলিক সংখ্যা হয়, প্রমাণ
কৰা যে $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$ ।

- (iv) (a) Show that the function μ is a multiplicative function. 5

দেখুওরা যে μ ফলনটো এটা গুণকীয় ফলন।

- (b) For each positive integer $n \geq 1$,

prove that $\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{if } n = 1 \\ 0, & \text{if } n > 1 \end{cases}$

5

প্রত্যেক ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা $n \geq 1$ -র বাবে প্রমাণ করা যে

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{if } n = 1 \\ 0, & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

- (v) (a) If p and q are distinct primes with

$$a^p \equiv a \pmod{q} \text{ and}$$

$$a^q \equiv a \pmod{p}, \text{ prove that}$$

$$a^{pq} \equiv a \pmod{pq}. \quad 5$$

যদি p আর q পৃথক মৌলিক সংখ্যা আর

$$a^p \equiv a \pmod{q} \text{ আর } a^q \equiv a \pmod{p}$$

হয়, তেজ্জে প্রমাণ করা যে

$$a^{pq} \equiv a \pmod{pq}।$$

- (b) Solve $18x \equiv 30 \pmod{42}$. 5

সমাধান করা $18x \equiv 30 \pmod{42}$ ।
