2025

MATHEMATICS

Course Name : Classical Algebra

Course Code : MAT-MAJ-1014/MAT-MIN-1014

Full Marks : 60

Time : $2^1/_2$ Hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Answer either in English or in Assamese

1. Answer the following questions : 1x8=8

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

a) If (যদি) $x = \cos\theta + i\sin\theta$ find (উলিওৱা) $x^n - \frac{1}{x^n}$.

b) Write (-1+i) in the form e^{x+iy}

(-1+i) ক e^{x+iy} ৰ আকাৰত প্ৰকাশ কৰা।

c) State whether the folowing statement is true or false.

তলত দিয়া উক্তিটো শুদ্ধ নে অশুদ্ধ নিৰ্ণয় কৰা

If $\propto$ *b* a multiple root of order *r* of a polynomial equation of degree *n* then $\propto$ is also *a* multiple root of the equateion $f^{/}(x) = 0$ of order r.

যদি $\propto$, n- মাত্ৰাৰ বহুপদীয় সমীকৰণ $f(x) = 0$ ৰ r মাত্ৰাৰ গুণিতক মূল হয়, তেন্তে $\propto$, $f^{/}(x) = 0$ সমীকৰণৰ r মাত্ৰা গুণিতক মুল হ'ব।

d) Write the equation whose roots are reciprocals of the roots of the equation $x^4-4x^3+3x^2+2x+1=0$.

$x^4-4x^3+3x^2+2x+1=0$ সমীকৰণৰ মূলৰ প্ৰতিলোম মূল হোৱা সমীকৰণটো লিখা।

e) Write the maximum number of complex roots that can exist of the equation $x^5 -1=0$

$x^5 -1=0$ সমীকৰণত স্থিত গৰিষ্ঠ সংখ্যক জটিল মূলৰ সংখ্যা লিখা।

f) Which of the following statements is true ?

তলৰ কোনটো উক্তি সত্য ?

(Turn over)

i) det (A^T) = det A , where A^T denotes transpose of A.
য'ত A^T হ'ল A ৰ পক্ষান্তৰ মৌলকক্ষ

ii) det $(A^{-1}) \neq [\det(A)]^{-1}$

iii) det (AB) = (det A) (det B), A and B are square matrices of any order য'ত A আৰু B সমান মাত্ৰাৰ বৰ্গ মৌলকক্ষ

iv) det (CA) = C^P det (A) where A is a PxP matrix and C is a scalar য'ত A, P x P মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ আৰু C এটা অদিশ ৰাশি।

g) If P is a n x q matrix and A is another matrix such that AP and PA are both defined, then what is the order of the matrix A ?
যদি P এটা n x q মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ আৰু A এটা অন্য মৌলকক্ষ যাতে AP আৰু PA সংজ্ঞাবদ্ধ হয়, তেতিয়া A ৰ মাত্ৰা কি হ'ব?

h) What is an Orthogonal matrix ? Give an example.
লম্বীয় মৌলকক্ষ কি? উদাহৰণ দিয়া।

2. Answer *any six* questions 2x6=12
যিকোনো ছয়টাৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

a) Express $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{25}$ in x+iy form.

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{25}$ ক x+iy আকাৰত প্ৰকাশ কৰা।

b) Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

c) Find all complex numbers z such that exp (2z+1) = i
সকলো জটিল সংখ্যা উলিওৱা যাতে exp (2z+1) = i

d) Apply Descartes rule of sign to find the existence of complex roots of the equation $5x^7-4x^3-x+4=0$
Descartes ৰ নিয়ম প্ৰয়োগ কৰি $5x^7-4x^3-x+4=0$ সমীকৰণৰ জটিল মূলৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা।

e) Find all roots of the cubic equation $x^3+5x^2+7x+2=0$ given that product of any two of the roots is 1.
$x^3+5x^2+7x+2=0$ ত্ৰিঘাতীয় সমীকৰণৰ সকলো মূল উলিওৱা য'ত দুটা মূলৰ পূৰণফল 1।

f) If α, β, γ are roots of the cubic equation $x^3+px^2+qx+r=0$ find the value of $\sum \frac{1}{\alpha^2}$

যদি α, β, γ, $x^3+px^2+qx+r=0$ সমীকৰণৰ মূল হয়, তেন্তে $\sum \frac{1}{\alpha^2}$ ৰ মান উলিওৱা।

g) How we define the rank of a matrix ?
এটা মৌলকক্ষৰ কোটি সংজ্ঞা দিয়া।

h) Show that diagonal elements of a skew symmetric matrix are all zero. দেখুওৱা যে এটা অপ্ৰতিসম মৌলকক্ষৰ বিকৰ্ণ মৌলবোৰ শূণ্য হয়।

3. Answer the following questions (*any four*) : 5x4=20
তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা (যিকোনো চাৰিটা) ঃ

i) Expand $\sin^5\theta$ in terms of sines of multiple of θ.
$\sin^5\theta$ ক sine ৰ θ ৰ গুণিতক হিচাপে প্ৰকাশ কৰা।

ii) Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে) ঃ

$$\left(\frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{i+\sin\theta-i\cos\theta}\right)^n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}-n\theta\right)+ i\sin\left(\frac{n\pi}{2}-n\theta\right)$$
$$= (\sin\theta+i\cos\theta)^n$$

iii) if $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ are roots of the equation $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ find the value of $\sum\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)$
যদি $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ সমীকৰণটোৰ মূল হয়, তেন্তে $\sum\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)$ মান নিৰ্ণয় কৰা।

iv) If $1 = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n$ are roots of the equation $x^n-1=0$, show that $(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)\ldots\ldots(1-\alpha_n) = n$
যদি $1 = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n$, $x^n-1=0$ সমীকৰণটোৰ মূল হয়, দেখুওৱা যে- $(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)\ldots\ldots(1-\alpha_n) = n$

v) Show that every square matrix is uniquely expressible as a sum of symmetric matrix and a skew symmetric matrix.
দেখুওৱা যে প্ৰতিটো বৰ্গীয় মৌলকক্ষক কেৱল মাত্ৰ এটা প্ৰতিসম আৰু এটা অপ্ৰতিসম মৌলকক্ষৰ সমষ্টি হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

vi) Find the rank of the following matrix using elementary transformations
মৌলিক প্ৰক্ৰিয়া দ্বাৰা তলত দিয়া মৌলকক্ষৰ কোটি নিৰ্ণয় কৰা।

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Answer ***any two*** of the following questions :
তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যিকোনো দুটাৰ উত্তৰ কৰা ঃ

a) Solve the following equation by eulers method - 10
অইলাৰৰ পদ্ধতিৰে তলত দিয়া সমীকৰণটো সমাধা কৰা-
$x^4-3x^2-6x-2=0$

b) i) Solve the equation given below by cardon's Method 6
কাৰ্ডনৰ পদ্ধতিৰে সমাধান কৰা ঃ $x^3-12x+8=0$

ii) If $\propto, \beta, \gamma$ are roots of the equation $x^3-x^2+8x-6=0$ find the equation whose roots are $\propto^2, \beta^2, \gamma^2$ 4
যদি $\propto, \beta, \gamma$, $x^3-x^2+8x-6=0$ সমীকৰণটোৰ মূল হয় তেন্তে $\propto^2, \beta^2, \gamma^2$ মূলযুক্ত সমীকৰণটো নিৰ্ণয় কৰা।

c) i) Express $\text{Log}\,(x + iy), x \neq 0, y \neq 0$ in the form $A + iB$ where A and B are real and find log (x+iy) 5
$\text{Log}\,(x + iy), x \neq 0, y \neq 0$ ক $A + iB$ আকাৰত প্ৰকাশ কৰা য'ত A আৰু B বাস্তৱ আৰু log (x+iy) ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা

ii) Calculate (মান নিৰ্ণয় কৰা) $\text{Cos}4\theta$ if (যদি) $\theta = \text{Cos}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 5

d) i) Solve the following system of equation- 5
তলত দিয়া প্ৰণালীবদ্ধ সমীকৰণৰ সমাধা কৰা-
$x_1 + x_2 + x_3 = 0$
$2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0$
$3x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 0$
$x_1 - 17x_2 - 4x_3 = 0$

ii) Reduce the following matrix to echelon form and determine its rank. 5
ইচেলন আকৃতিলৈ নি তলত দিয়া মৌলকক্ষটোৰ কোটি নিৰ্ণয় কৰা।

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ -8 & -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$